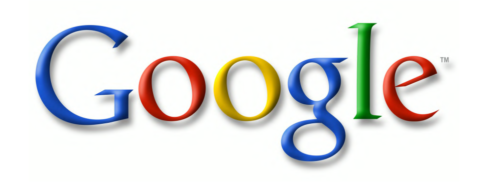
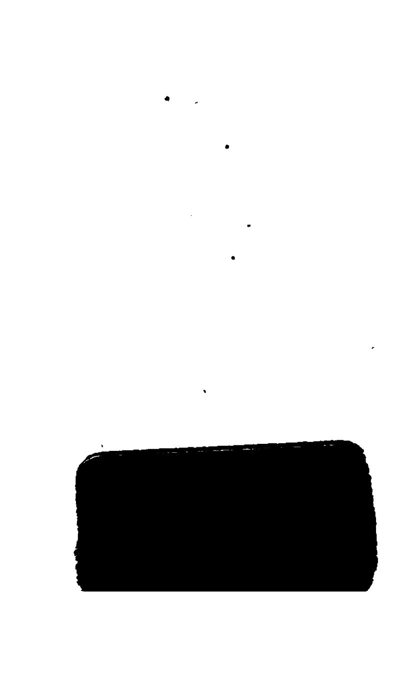






À Son Excellence

Monsieur le Maréchal

Duc de Trévise.

Hommage de l'auteur.

INTRODUCTION

A L'ÉTUDE

DE LA STATIQUE SYNTHÉTIQUE,

A L'USAGE DE L'INSTITUT DU CORPS DES VOIES DE COMMUNICATION,

DÉDIÉE A SON ALTESSE ROYALE MONSEIGNEUR LE DUC ALEXANDRE DE WURTEMBERG, DIRIGEANT EN CHEF DES VOIES DE COMMUNICATION DE L'EMPIRE,

PAR

le Lieutenant-Général Bazaine,

INSPECTEUR-GÉNÉRAL DES VOIES DE COMMUNICATION, DIRECTEUR DE L'INSTITUT DU MÊME CORPS, ETC. ETC.

ST. PÉTERSBOURG,

A l'Imprimerie des voies de communication.

1830.

Permis d'imprimer,

à la charge de fournir au Comité de Censure, après l'impression, trois exemplaires de cet ouvrage. St. Pétersbourg, le 3 Avril, 1830.

Nicolas Stcheglof, Censeur.

A Son Altesse Royale

Monseigneur le Duc ALEXANDRE DE WURTEMBERG.

Monseigneur,

Le désir de concourir à l'accomplissement des vues bienfaisantes de Votre Altesse Royale m'a engagé à chercher les moyens de faciliter à la jeunesse qui se forme sous ses auspices, l'accès des sciences mécaniques, auxquelles les arts et l'industrie empruntent tous les jours de si nombreuses et si brillantes applications. L'Introduction à l'étude de la Statique synthétique, que je prends la liberté de soumettre à ses hautes lumières, est fondée sur une série de démonstrations que je crois neuves, et qui me semblent douées de cette clarté rigoureuse, qui doit constituer le principal mérite de tout livre élémentaire. Si Votre Altesse Royale, en autorisant sa publication, daignait en agréer la dédicace, cette insigne faveur mettrait le comble à mes voeux, et stimulerait à la fois les efforts de nos professeurs, et l'attention de nos élèves, en leur offrant un nouveau gage de l'éclatante et Auguste protection, à laquelle l'Institut que j'ai l'honneur de diriger est redevable de sa prospérité.

J'ai l'honneur d'être avec le plus profond respect,

Monseigneur,

de Votre Altesse Royale,

Le très humble et très obéissant serviteur et subordonné

Bazaine.

INTRODUCTION

A L'ÉTUDE

DE LA STATIQUE SYNTHÉTIQUE.

La méthode d'enseignement suivie à l'Ecole Royale Polytechnique de France, et consacrée par plus de 30 ans de succès, a prouvé combien la connaissance préliminaire de la Statique démontrée par la Synthèse, est propre à faciliter l'étude de la statique analytique. Cette dernière était cependant la seule qui fût enseignée jusqu'à présent aux élèves de l'Institut des Voies de communication: le défaut de temps, et le grand nombre d'objets qui composent le cours complet de leur instruction, n'avaient pas permis de les occuper de la Statique synthétique. Aujourd'hui les lumières de l'expérience, et les perfectionnemens successifs dus à la sollicitude paternelle de Son Altesse Royale Monseigneur le Duc de Wurtemberg, ont mis les chefs de cet établissement à même d'opérer une répartition plus égale dans les études. Pénétrés de la nécessité d'aplanir les obstacles qui ac-

compagnent ordinairement l'exposition des principes généraux de la mécanique rationnelle, ils ont proposé de faire précéder cette exposition, d'un cours de Statique synthétique, qui parlant à la fois aux yeux et à l'esprit des élèves, les accoutumât par dégrés aux conceptions les plus abstraites de la science de l'équilibre et du mouvement.

Cette innovation favorable, que Son Altesse Royale a daigné honorer de sa sanction, exigeait que l'on mît entre les mains des élèves, un ouvrage qui joignît au mérite de la concision, celui d'une extrême clarté. Le traité de Statique élémentaire, dû à l'immortel auteur de la géométrie descriptive, était sans contredit celui qui réunissait au plus haut dégré ce double avantage, et l'Institut s'est empressé de l'adopter, comme texte de ses nouvelles leçons. Mais malgré tout le respect que commandent le nom de Monge et les travaux dont il a enrichi le domaine des sciences, on ne peut pas se dissimuler que presque toutes les premières propositions de son ouvrage, laissent peut-être quelque chose à désirer, je ne dirai pas sous le rap-

port de la rigueur, mais au moins sous celui de la simplicité qui doit caractériser les démonstrations des livres élémentaires.

Dans une des dernières éditions de ce traité, Mr. Hachette s'est attaché à présenter pour quelques uns des théorêmes fondamentaux, des démonsrations plus conformes au dégré d'intelligence des élèves qui commencent l'étude de la Mécanique. Quoiqu'il ait emprunté la partie la plus remarquable de son travail à l'un des plus célèbres géomètres de notre siècle, et à l'ingénieuse statique de Mr. Poinsot, il me semble néanmoins qu'il est possible de parvenir au même but par des considérations encore plus simples et plus méthodiques que celles dont il a fait usage.

La première partie des propositions que l'on va lire devait entrer dans la composition d'un traité élémentaire de Mécanique, que j'avais commencé dans le temps où j'étais chargé de l'enseignement de cette science à l'Institut des Voies de communication. La tâche que je m'étais imposée a depuis été remplie avec beaucoup de succès par Mr. le Général-Major Destrem, qui m'a succédé

dans cette fonction, et qui a pris l'excellent ouvrage de Poisson pour guide et pour modèle. J'ai donc fait sans regret le sacrifice des nombreux matériaux que j'avais déjà rassemblés; Mais comme dans le traité que je me proposais de publier, je m'étais fait une loi de fonder sur la synthèse, la démonstration des principes généraux de l'équilibre, je saisis avec empressement l'occasion qui se présente d'utiliser une faible portion de mon travail, en offrant à nos jeunes ingénieurs le moyen de lever les difficultés qui pourraient les arrêter dans l'étude de la Statique synthétique.

J'emprunterai au traité élémentaire de Monge, (2ème Edition, 1795), les notions préliminaires qui doivent servir de base à cette science, et l'on pourra remplacer par ce qui va suivre, toute la première partie de l'ouvrage, jusques et compris la proposition qui est connue sous le nom de *parallélogramme des forces*.

Je suivrai dans cette Introduction deux méthodes inverses l'une de l'autre. La première, à laquelle je m'étais exclusivement

attaché dans le cours que je méditais, consistera à passer de la théorie des forces parallèles à celle des forces concourantes. La seconde, qui ne s'est offerte à mes recherches que dans ces derniers temps, sera fondée sur une nouvelle démonstration à *priori* du parallélogramme des forces, et fera dépendre de cette proposition fondamentale, les théorêmes relatifs aux forces parallèles. L'une quelconque de ces méthodes suffira sans doute pour l'enseignement complet des premiers principes de la Statique synthétique, mais je crois qu'en les exposant toutes deux, et en présentant ainsi à l'esprit des élèves, sous un double point de vue, des notions qui ne sauraient être trop claires et trop précises, on ne fera que favoriser leur instruction, et faciliter leurs progrès.

DÉFINITIONS.

"On appelle *Corps* ou *substance matérielle*, »tout ce qui est capable d'affecter nos sens."

"Les corps se divisent en solides et fluides. Un »corps est solide, losque les molécules qui le compo»sent sont adhérentes, et ne peuvent être séparées »les unes des autres sans effort; de ce nombre sont »les métaux, les pierres, les bois, etc. Il est fluide, »lorsque toutes ses molécules peuvent au contraire »être séparées avec la plus grande facilité: Tels sont »l'eau, l'air, etc."

"Tous les corps sont *mobiles*; c'est-à-dire qu'ils »peuvent être transportés d'un lieu dans un autre. »On dit qu'un corps est en repos, quand toutes les »parties qui le composent restent chacune dans le »même lieu; et l'on dit qu'il est en mouvement, lors»qu'il change de place, ou lorsque les parties dont »il est composé passent d'un lieu dans un autre."

"Un corps en repos ne peut entrer en mouvement, »et lorsqu'il est en mouvement, il ne peut changer la »manière dont il se meut, sans l'action de quelque »cause, à laquelle on donne en général le nom de »*force* ou de *puissance*."

"On considère dans une force; 1°. sa grandeur, »c'est-à-dire l'effort qu'elle fait pour mouvoir le

»corps, ou le point du corps, auquel elle est appli»quée: 2°. sa direction, c'est-à-dire, la ligne droite »suivant laquelle elle tend à mouvoir le point du »corps sur lequel elle agit."

"Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un »même corps, il peut arriver deux cas: ou ces for»ces se contrebalancent et se détruisent réciproque»ment; alors on dit qu'elles se font équilibre, et le »corps reste en repos; ou bien en vertu de l'action »de toutes ces forces, le corps entre en mouvement."

"D'après cela, on appelle *Mécanique*, la science »qui a pour objet de connaître l'effet que doit en »général produire sur un corps l'application de for»ces déterminées. Cette science se divise en deux »parties; la première considère les rapports que les »forces doivent avoir en grandeurs et en directions, »pour être en équilibre, et on l'appelle *Statique*; la »seconde, à laquelle on donne le nom de *Dynami»que*, recherche la manière dont le corps se meut, »lorsque ces forces ne se détruisent pas entièrement."

"Chacune de ces parties se divise encore elle-mê»me en deux autres, selon que le corps auquel on »suppose que les forces sont appliquées, est solide »ou fluide. La partie de la Statique qui traite de »l'équilibre des forces appliquées à des corps solides »se nomme simplement Statique, ou Statique pro»prement dite; et on appelle *Hydrostatique*, celle »qui a pour objet l'équilibre des forces appliquées »aux différentes molécules d'un corps fluide."

Chapitre I.

De la composition et de la décomposition des forces.

1. ‘‘*Losqu’une force P, appliquée à un point* Fig. 1.2.
»*déterminé C d’un corps solide AB, tire, ou pousse ce corps suivant une direction quelconque CF, il doit être permis de considérer cette force comme si elle était immédiatement appliquée à tout autre point D du corps, pris sur la direction de cette force.*’’

‘‘Car tous les points du corps qui sont sur la »droite *CF* ne pouvant ni se rapprocher, ni s’éloi»gner les uns des autres, aucun d’eux ne peut se mou»voir suivant cette droite, sans faire mouvoir tous »les autres de la même manière que si la force leur »était immédiatement appliquée.’’

‘‘*Il doit même être permis de considérer la force »P comme si elle était appliquée à tout autre point »G, pris au dehors du corps sur sa direction, »pourvu que ce point soit invariablement attaché »au corps.*’’

2. ‘‘Il suit de là que si sur la direction de la force »*P*, il se trouve, ou en dedans du corps un point »fixe *D*, ou en dehors un obstacle immobile *G*, »pourvu que dans ce dernier cas, l’obstacle soit in»variablement attaché au corps, la force sera détrui»te, et le corps restera en repos; car on pourra regar»der cette force comme immédiatement appliquée

»au point fixe, et son effet sera détruit par la résis»tance de ce point."

3. "Réciproquement si la force *P*, appliquée au »corps *AB*, est détruite par la résistance d'un seul »point fixe, ce point se trouve sur la direction de la »force; car ce point ne peut détruire l'effet de la for»ce, qu'en s'opposant au mouvement du point d'ap»plication *C*: et il ne peut empêcher ce mouvement, »à moins qu'il ne soit sur la droite que la force tend »à faire parcourir au point d'application."

AXIÔMES

I.

4. "*Un point ne peut aller par plusieurs che»mins à la fois.*"

5. "Donc, lorsque plusieurs forces, différemment »dirigées, seront appliquées en même tems à un »même point, ou ce point restera en repos, ou il se »mouvra par un seul chemin, et par conséquent de »la même manière que s'il était poussé ou tiré par »une force unique, dirigée suivant ce chemin, et ca»pable du même effet."

6. "Ainsi, quelques soient le nombre et les direc»tions des forces appliquées en même tems à un mê»me point, il existe toujours une force unique qui »peut le mouvoir, ou tendre à le mouvoir de la mê»me manière que toutes ces forces ensemble; cette »force unique se nomme la *résultante* des premières,

»et celles-ci, par rapport à la résultante, se nom-»ment forces *composantes*."

"L'opération par laquelle on cherche la résultan-»te de plusieurs forces composantes données, se nom-»me la *composition* des forces; et celle par laquelle »on trouve les composantes, lorsqu'on connaît la ré-»sultante, se nomme la *décomposition* des forces."

II.

7. "*Deux forces égales et directement opposées,* »*appliquées en même tems à un même point, se* »*détruisent et se font équilibre.*"

"*Réciproquement lorsque deux forces se font* »*équilibre, elles sont égales et directement op-*»*posées.*"

8. "Donc si plusieurs forces, différemment diri-»gées, sont appliquées à un même point, pour leur »faire équilibre, c'est-à-dire, pour détruire l'effet de »leur résultante, il faut appliquer à ce point une »force unique égale à cette résultante, et qui lui soit »directement opposée; ou appliquer plusieurs forces »dont la résultante soit égale et directement opposée »à la résultante des premières."

9. "Réciproquement, lorsque plusieurs forces, »différemment dirigées, et appliquées à un même »point, sont en équilibre, leur résultante est nulle, »ou ce qui revient au même, l'une quelconque de »ces forces est égale et directement opposée à la »résultante de toutes les autres; ou enfin la résul-»tante d'un nombre quelconque de ces forces est

»est égale et directement opposée à la résultante de »toutes les autres."

III.

10. "*Si plusieurs forces appliquées à un même »point, ont la même direction, et agissent dans le »même sens, elles produisent sur ce point le même »effet qu'une force unique, qui serait égale à leur »somme, qui aurait la même direction, et qui »agirait dans le même sens; par conséquent cette »force unique est leur résultante.*"

11. "Donc, pour faire équilibre à toutes ces forces, »il faut appliquer au même point et dans le sens di- »rectement opposé, une force égale à leur somme; »car cette force sera égale et directement opposée à »leur résultante."

12. "Il suit de là: 1°. que si deux forces inégales »sont appliquées à un même point dans des sens di- »rectement contraires, leur résultante est dirigée »dans le sens de la plus grande, et est égale à leur »différence; car la plus grande de ces deux forces »peut être regardée comme composée de deux autres »forces dirigées dans le même sens qu'elle, dont »l'une serait égale à la plus petite, et dont l'autre »serait égale à la différence; or de ces deux dernié- »res forces, la première est détruite par la plus pe- »tite (7); donc il ne reste plus, pour mouvoir le »point, que la différence, qui est dirigée dans le mê- »me sens que la plus grande."

13. 2°. "Que si tant de forces qu'on voudra sont »appliquées à un même point, les unes dirigées dans »un sens, et les autres dans le sens directement op»posé; après avoir fait la somme de toutes celles qui »agissent dans un des deux sens, et la somme de »toutes celles qui agissent dans le sens contraire, la »résultante de toutes ces forces est égale à la diffé»rence de ces deux sommes (12), et est dirigée dans »le sens de la plus grande."

14. "Donc, pour faire équilibre à toutes ces for»ces, il faut appliquer au même point, et dans la di»rection de la plus petite des deux sommes, une for»ce égale à la différence de ces sommes: Car cette »force sera égale et directement opposée à leur ré»sultante."

THÉORÊME I.

15. *La résultante de deux forces égales appliquées à un même point, a sa direction située dans le plan déterminé par les directions de ces forces, et partage l'angle qu'elles forment entre elles en deux parties égales.*

Démonstration: Soient P et Q deux forces égales, agissant sur le point A, dans le plan MN représenté en perspective sur le plan du tableau. Supposons que leur résultante agisse suivant une direction Ar, située hors du plan de ces forces. Fig. 3.

En traçant dans ce plan la droite AC qui partage l'angle PAQ en deux parties égales, et en faisant tourner autour de cette droite, le systême des forces

données, sans rien changer à la position du corps soumis à leur action, il est clair qu'après une demi-révolution, Fig. 4. la force P se trouvera à la place qu'occupait la force Q, et réciproquement, et que la résultante r aura passé à gauche du plan MN, dans une position symétrique à celle qu'elle occupait d'abord. Les deux forces données P et Q étant égales par hypothèse, la figure 4 sera évidemment identique avec la fig. 3. Mais comme dans cette dernière, la résultante des deux forces est dirigée suivant Ar, tandis que dans la fig. 4, elle agit suivant Ar', il s'ensuit que cette résultante peut agir indifféremment suivant l'une ou l'autre de ces directions; conséquence absurde, qui fait voir que la résultante des deux forces proposées doit être immanquablement située dans le même plan que ces forces.

Une considération analogue prouve que cette résultante doit partager l'angle formé par la direction des forces P et Q en deux parties égales.

Supposons en effet qu'elle agisse suivant une direction quelconque Ar (fig. 5), telle que l'angle PAr soit plus petit que rAQ: En faisant tourner le plan des forces autour de la droite BC, qui divise l'angle formé par leurs directions en deux parties égales, la ligne Ar après une demi-révolution, prendra la position Ar' (fig. 6). Mais tout étant absolument le même, à cause de l'identité des forces, dans la fig. 6 que dans la fig. 5, on en conclut que Ar' est aussi bien la direction de la résultante que Ar,

et que par conséquent cette résultante peut agir suivant deux directions différentes, conséquence dont l'absurdité démontre que la résultante doit suivre la direction AC, pour laquelle les angles PAC et CAQ sont égaux entre eux.

COROLLAIRE 1.

16. Chaque couple de forces égales P, Q, ayant ainsi pour résultante une force r dont la direction partage l'angle PAQ en deux parties égales, il est visible que le système de deux forces multiples mP, mQ, composé d'un nombre m de couples semblables, aura pour résultante une force égale à mr, agissant dans la même direction que la résultante primitive r. Fig. 7.

COROLLAIRE 2.

17. L'action des deux forces égales P, Q, pouvant être remplacée par l'action de leur résultante r, il s'ensuit que réciproquement on pourra toujours substituer à l'action d'une force unique quelconque, celle de deux forces égales, formant avec la première des angles égaux, et situées avec elle dans un même plan, pourvu que la grandeur de ces dernières soit déterminée de manière à ce que la force donnée soit égale à leur résultante.

Remarque.

18. Si les directions des deux forces données P, Q, ne concouraient pas en un même point, et que par conséquent elles ne se trouvassent pas comprises dans un même plan, ces deux forces, soit qu'elles fussent

égales, soit qu'elles fussent inégales, n'auraient pas de résultante; car ne pouvant pas alors être regardées comme destinées à mouvoir un point unique, il est clair qu'une force unique serait incapable de produire le même effet.

THÉORÊME 2.

Fig. 8, 9. 19. *Si l'on a deux couples de forces angulaires $P, P; P', P'$, égales deux à deux, et formant entre elles des angles égaux PAP, $P'A'P'$, les résultantes R et R' de ces couples de forces sont entre elles dans le même rapport que leurs composantes, c'est-à-dire que l'on a :*

$$\frac{P'}{P}=\frac{R'}{R}.$$

Démonstration. Supposons que les forces P et P' soient commensurables entre elles, ou susceptibles d'une commune mesure p, et qu'on ait par exemple: $P=mp, P'=m'p$; appelons r la résultante de deux forces égales à cette commune mesure, et formant entre elles le même angle que les forces données. Il est clair, d'après le premier des corollaires précédents, que les résultantes R et R' seront respectivement égales à mr, et $m'r$: Les rapports $\frac{P'}{P}$, $\frac{R'}{R}$, étant égaux, le premier à $\frac{m'p}{mp}$ ou à $\frac{m'}{m}$, et le second à $\frac{m'r}{mr}$ ou $\frac{m'}{m'}$, on est conduit immédiatement à l'équation $\frac{P'}{P}=\frac{R'}{R}$, qui vérifie l'énoncé du théorême.

Dans le cas où les forces P et P' seront incommensurables, on conçoit qu'il sera toujours possible de substituer à l'une d'elles, à P' par exemple, deux forces P'' et Π, dont la somme soit égale à P', et dont la première soit commensurable avec P. En nommant R'' la résultante des deux forces P'', et S celle des deux forces Π, il est évident qu'on aura: $R'=R'+S$, et que les deux forces commensurables P'' et P seront liées entre elles par la relation: Fig. 8, 10.

$$\frac{P''}{P}=\frac{R''}{R},$$

ou, en mettant à la place de P'' et R'', leurs valeurs

$$P'-\Pi \text{ et } R'-S,$$

$$\frac{P'-\Pi}{P}=\frac{R'-S}{R}.$$

Dans cette équation, les quantités Π et S, fonctions l'une de l'autre, sont soumises aux mêmes lois d'accroissement et de décroissement. Or la force P'' pouvant être prise aussi voisine de P' qu'on le voudra, on voit que Π peut être regardée comme étant susceptible d'une valeur moindre que toute grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur, et que par conséquent $\frac{P'}{P}$ est une véritable limite vers laquelle le rapport $\frac{P'-\Pi}{P}$ tend sans cesse, sans pouvoir jamais l'atteindre; mais à mesure que Π diminue, S diminue également, et le rapport $\frac{R'-S}{R}$ s'approche sans cesse de la limite $\frac{R'}{R}$. Donc, en se fon-

dant sur ce principe, que des quantités variables toujours égales entre elles ont des limites égales, on a:

$$\frac{P'}{P}=\frac{R'}{R},$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3.

20. *La résultante de deux forces rectangulaires égales entre elles, est égale au produit de l'une des forces données multipliée par la racine quarrée de 2.*

Démonstration: Représentons par R la résultante
Fig. 11. des deux forces P, P, qui forment entre elles un angle droit. La direction $A\,R$ de cette résultante, divisant l'angle $P\,A\,P$ en deux parties égales (Théor. 1), chacun des angles $R\,A\,P$ sera de 45 dégrés. Menons par le point A la ligne $r\,r$ perpendiculaire à $A\,R$. Il est visible que chacune des forces P pourra être considérée comme étant la résultante de deux forces égales et inconnues r, agissant, l'une suivant $A\,R$, l'autre suivant Ar. Le systême des deux forces données pourra donc être remplacé par celui de quatre forces égales à r, dont deux suivront la direction $A\,R$, et dont les deux autres agiront sur le point A dans des sens opposés, suivant la droite $r\,r$. Ces deux dernières se faisant mutuellement équilibre, il ne restera que les deux premières, qui agissant dans le même sens suivant la direction $A\,R$, produiront l'effet d'une force unique égale à leur somme, ou à

$2r$. La résultante cherchée ayant été représentée par R, on aura donc:

$$R = 2r, \text{ d'où } r = \frac{R}{2}.$$

Mais on a d'après le théorème précédent: $\frac{r}{P} = \frac{P}{R}$, ou, en mettant au lieu de r sa valeur $\frac{R}{2}$,

$$\frac{R}{2P} = \frac{P}{R}.$$

De cette équation on déduit $R^2 = 2P^2$, ou $R = P\sqrt{2}$, *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE 1.

21. Ce résultat apprend que pour faire équilibre à deux forces rectangulaires égales, il suffit d'appliquer au point de concours de leurs directions une troisième force, qui soit égale à l'une d'elles multipliée par la racine quarrée de 2, qui agisse dans un sens opposé, et dont la direction forme avec les droites *A P*, des angles égaux à 135°. Cette force étant en effet égale et directement opposée à la résultante des forces données, détruira l'effet de cette résultante.

COROLLAIRE 2.

22. Une manière très commode de figurer l'intensité ou la grandeur des forces que l'on considère dans toutes les branches de la mécanique, consiste à prendre sur leurs directions des longueurs qui comprennent autant d'unités linéaires que les forces données comprennent de fois l'unité de force, à laquelle on donne aussi le nom *d'unité dynamique*.

On dit alors que les forces données sont *représentées* par ces longueurs. Ainsi par exemple, quand on dit
Fig. 12. qu'une force quelconque P, agissant sur le point A, est représentée par la ligne $A\,B$, cette expression signifie qu'en rapportant la longueur $A\,B$ à l'unité linéaire, on y trouvera cette unité comprise autant de fois, qu'il y a d'unités dymaniques dans la force P.

Il suit de là que quelque soit le nombre de forces que l'on considère, ces forces peuvent être regardées comme parfaitement déterminées, lorsqu'on assigne sur leurs directions des longueurs qui leur sont proportionnelles. Si deux forces P et Q, par exemple, sont supposées proportionnelles aux longueurs AB et $C\,D$, de manière que l'on ait:

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{CD},$$

il suffira de déterminer par les règles de la géométrie, la commune mesure de ces longueurs, et si l'on trouve qu'elle est comprise m fois dans la 1e. et n fois dans la 2e, ou que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$, on aura également:

$$\frac{P}{Q} = \frac{m}{n},$$

Ce qui apprendra que la force P comprendra un nombre m d'unités dynamiques, tandis que la force Q en comprendra un nombre n.

23. Cette sorte de convention très simple, par laquelle les forces se trouvent représentées par des longueurs qui leur sont proportionnelles, permet

d'énoncer le théorême que nous venons de démontrer, de la manière suivante:

Si deux forces rectangulaires égales sont représentées par les côtés d'un quarré quelconque ABCD construit sur leurs directions, leur résultante R sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale A D de ce quarré; et en effet le triangle rectangle ACD donnant $AD^2 = AC^2 + CD^2$, ou à cause de $CD = AC$, $AD^2 = 2AC^2$, on en déduit $\frac{AD}{AC} = \sqrt{2}$, mais nous avons vu que $\frac{R}{P} = \sqrt{2}$, donc $\frac{R}{P} = \frac{AD}{AC}$. Fig. 13.

On verra par la suite comment cette propriété très remarquable se généralise pour des forces angulaires quelconques.

THÉORÊME 4.

24. *Si aux extrémités d'une droite inflexible AB, sont appliquées deux forces égales P, Q, dont les directions AP, BQ, soient parallèles entre elles, et qui agissent dans le même sens;* Fig. 14.

1°. *La résultante R de ces deux forces sera égale à leur somme P+Q* ou 2 *P;*

2°. *La direction de cette résultante sera parallèle aux directions des forces, et divisera leur droite d'application en deux parties égales.*

Démonstration. 1[ere]. *Partie.* Soit une autre droite inflexible *DE*, perpendiculaire aux directions des deux forces, et attachée invariablement à la droi-

te AB; En prolongeant les directions des deux forces P, Q, jusqu'à ce qu'elles coupent cette droite aux points D et E, on pourra regarder ces points comme étant ceux auxquels les forces données sont appliquées. Cela posé, prolongeons la droite DE dans les deux sens DP', EQ', et concevons suivant ses prolongemens deux forces P' Q', égales entre elles, et aux deux forces données P,Q. Ces deux nouvelles forces, agissant suivant la même droite et dans des directions opposées, se détruiront mutuellement et ne changeront rien à l'effet produit. La résultante des quatre forces P,P', Q,Q', sera donc la même que celle des deux forces P, Q.

Mais les deux forces P et P' étant égales et rectangulaires, peuvent être remplacées par une force unique égale à $P\sqrt{2}$, dont la direction formera avec celles des deux composantes, des angles égaux à 45°.

De même les deux forces Q et Q', aussi égales et rectangulaires, auront pour résultante une force égale à $Q\sqrt{2}$, telle que chacun des angles $Q\,E\,Q'\sqrt{2}$ et $Q'\,E\,Q\sqrt{2}$ sera également de 45°.

Le système des quatre forces P, P', Q, Q', se trouvant ainsi ramené à celui des deux résultantes partielles, évidemment égales, $P\sqrt{2}$ et $Q\sqrt{2}$, la résultante de ces dernières ne sera autre que la résulsultante R des forces P et Q. Or on est en droit de regarder ces deux forces $P\sqrt{2}$, $Q\sqrt{2}$, comme étant appliquées au point F de concours de leurs directions (§ 1). De plus le triangle FDE ayant ses

deux angles en D et en F respectivement égaux à $P'DP\sqrt{2}$ et $Q'EQ\sqrt{2}$, qui sont chacun de 45°, il s'ensuit que ce triangle est rectangle en F, et que par conséquent les deux forces égales $P\sqrt{2}$ et $Q\sqrt{2}$ ont pour résultante une force égale à l'une d'elles multipliée par la racine quarrée de 2; donc on a $R=P\sqrt{2}\times\sqrt{2}$, ou $R=2P=P+Q$,

C. Q. F. D.

2e. *Partie.* Le triangle rectangle DFE étant isocèle, et la direction de la résultante R des deux forces $P\sqrt{2}$ et $Q\sqrt{2}$ devant former des angles égaux avec ses composantes, cette direction sera visiblement perpendiculaire à la droite DE, et la divisera au point C en deux parties égales. Elle sera donc parallèle aux directions AP, BQ, des deux forces données; les deux lignes DE et AB seront donc divisées par les lignes DA, CG, et EB en parties proportionnelles, et l'on aura: $DC:CE=AG:GB$, d'où à cause de $DC=CE$, on déduira $AG=GB$. Donc la résultante R passera par le milieu de AB.

COROLLAIRE 1.

25. Pour faire équilibre à deux forces P, Q, égales et parallèles, il faudra donc appliquer au milieu G de la droite d'application, une troisième force égale à leur somme, qui agisse en sens contraire, et dont la direction soit parallèle aux droites AP, BQ; car cette troisième force sera égale et directement opposée à leur résultante.

2

COROLLAIRE 2.

Fig. 15. 26. Si après avoir divisé une droite inflexible en un nombre quelconque de parties égales, on applique à tous les points de division des forces égales, dont les directions soient parallèles entre elles, la résultante de toutes ces forces partagera la droite d'application en deux parties égales, suivra une direction parallèle à celle des forces, et sera égale à leur somme totale :

Car en considérant successivement les couples de forces P, Q; P', Q'; P'', Q'', etc.; les résultantes partielles de ces couples r, r', r'', etc. passeront toutes par le milieu K de AB, en suivant une direction parallèle à celles des forces, et l'on aura :

$$r = P + Q$$
$$r' = P' + Q'$$
$$r'' = P'' + Q''$$
etc. . . . . . .

Mais ces résultantes partielles, agissant suivant une même ligne droite, produiront le même effet qu'une force unique R égale à leur somme, et qui sera évidemment la résultante totale du systême : donc on aura :

$$R = r + r' + r'' + \text{etc},$$

ou $R = P + P' + P'' + \text{etc.} + Q + Q' + Q'' + \text{etc.}$

De plus cette résultante agira suivant une directionparall èle à celles des composantes.

THÉORÈME 5.

27. *Si aux extrémités d'une droite inflexible A B, sont appliquées deux forces inégales P, Q, dont les directions A P, B Q, soient parallèles entre elles, et qui agissent dans le même sens;* Fig. 16.

1°. *La résultante R de ces forces est égale à leur somme, et sa direction est parallèle à celles de ces forces:*

2°. *Le point C d'application de la résultante partage la droite AB en deux parties réciproquement proportionnelles aux deux forces, de manière que l'on a:*

$$P: Q = BC: AC.$$

Démonstration. Il est aisé de s'assurer d'abord que la résultante *R* sera égale à la somme des forces données *P* et *Q*, et suivra une direction parallèle à celles de ces forces. Prolongeons en effet la droite d'application *A B* au delà des points *A* et *B*, et appliquons suivant ses prolongements deux forces quelconques *S*, *S'*, égales entre elles, qui se feront mutuellemeut équilibre: Cette addition ne changera rien au systême des forces données. Les deux forces *P*, *S*, ayant une résultante *r* située dans le plan de leurs directions, et les deux forces *Q*, *S'*, ayant une résultante *r'* également située dans ce plan, il est clair que la résultante des forces *r*, *r'*, sera la même que celle des forces proposées *P*, *Q*. Mais les directions *A r* et *B r'* étant prolongées jusqu'à leur intersection en *G*, on pourra concevoir les forces *r* et *r'*

appliquées en ce point. Remplaçant à ce même point la résultante partielle r par ses deux composantes S, P, agissant suivant $G\,S$ et $G\,R$, respectivement parallèles à $A\,S$ et $A\,P$; substituant de même à r' ses deux composantes S' et Q, le système des forces données sera ramené à celui des quatre forces S, S', P et Q, agissant sur le même point G. Or les deux premières S, S', étant égales entre elles et directement opposées, se détruisent réciproquement; il ne reste donc que les deux forces P, Q, qui agissant suivant la même direction, produisent le même effet qu'une force unique égale à leur somme. Cette force unique, ou la résultante générale du système, est donc égale à $P+Q$, et suit une direction $G\,R$ parallèle à celle des forces proposées P et Q.

Pour trouver la position du point C, dans lequel cette direction $G\,R$ coupe la droite d'application, nous remarquerons que les forces données P, Q, peuvent être commensurables entre elles, ou incommensurables.

Dans le 1er. cas, nous appellerons p la force qui leur servira de commune mesure, et nous supposerons:

$$P = m\,p,\; Q = n\,p,$$

$$\text{ou } P : Q = m : n.$$

Fig. 17. Soit divisée au point D la droite d'application $A\,B$ en deux parties proportionnelles aux nombres m et n, de manière à ce qu'on ait:

$$m : n = A\,D : B\,D,$$

ou ce qui revient au même :

$$P : Q = AD : BD.$$

Soit prolongée la droite AB au delà de ses extrémités A et B, et soient pris sur ses prolongements $BE = BD$, $AF = AD$. Les parties AD et BD étant entre elles par hypothèse comme m est à n, on pourra diviser FD, double de AD, en $2m$ parties égales, et DE double de BD en $2n$ parties, aussi égales aux précédentes. Si au milieu de chacune de ces divisions, on applique une force égale à $\frac{P}{2}$, on aura de F en D, $2m$ forces parallèles entre elles, dont chacune sera égale à $\frac{P}{2}$, et dont l'action totale sera équivalente à leur somme $2m \times \frac{P}{2}$, c'est-à-dire à mp, ou à la force P. De même on aura de D en E, $2n$ forces parallèles et égales à $\frac{P}{2}$, dont l'action sera la même que celle de la force Q, ou np. Les forces données P, Q, se trouveront donc ainsi remplacées par $2m + 2n$ autres forces, égales et parallèles entre elles, dont la résultante sera évidemment la même que celle des deux premières. Or ces $2m + 2n$ forces égales, étant également distribuées le long de la droite FE (§ 26), doivent avoir pour résultante une force égale à leur somme, et qui passe par le milieu C de la droite FE: donc la résultante R, égale à $(2m + 2n)\frac{P}{2}$, ou à $P + Q$, et parallèle aux directions de ces forces, passera par le point C, milieu de la droite EF.

Mais de $AD = AF$, et $BD = BE$, on déduit: $AD + BD$ ou $AB = AF + BE$; ce qui montre que AB est égale à la moitié de la ligne totale FE. On a donc $AB = FC = CE$. De $AB = FC$, retranchant la partie commune AC, il reste $AF = BC$, ou à cause de $AF = AD$, $AD = BC$. De $AB = CE$, retranchant la partie commune CB, il reste BE ou $BD = AC$. Mettant donc dans la proportion $P : Q = AD : BD$, au lieu de AD et de BD leurs valeurs BC et AC, il vient: $P : Q = BC : AC$, ce qui fait voir, ainsi que l'énonce le théorême, que le point C d'application de la résultante partage la droite AB en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces P et Q.

Considérons actuellement le cas où ces forces seraient incommensurables; décomposons la force P
Fig. 18. en deux autres P' et Π, dont la première soit commensurable avec Q. La résultante des deux forces P', Q, suivant ce qui précède, passera par un point G, tel qu'on aura:

$$P' : Q = BG : AG.$$

Il est visible que le point d'application de la résultante des deux forces P, Q, sera nécessairement situé entre les points G et A, car le 1er antécédent P' augmentant, le 2ème antécédent BG doit augmenter aussi. Supposons donc que ce point soit situé en C, et faisons $GC = x$; nous aurons:

$$BG = BC - x,$$
$$AG = AC + x.$$

Substituant ces expressions dans la proportion précédente, et mettant au lieu de P', sa valeur $P-\Pi$, il viendra $P-\Pi : Q = BC - x : AC + x$, ou ce qui est la même chose :

$$\frac{P-\Pi}{Q} = \frac{BC-x}{AC+x}.$$

La force P' pouvant être prise aussi voisine de P qu'on voudra, et la différence Π de ces deux forces pouvant devenir plus petite que toute grandeur donnée, le rapport variable du 1er. membre tend sans cesse vers la limite $\frac{P}{Q}$; mais à mesure que P' diffère de moins en moins de la force P, le point G se rapproche du point C, et la quantité GC ou x devient de plus en plus petite: Le rapport constant $\frac{BC}{AC}$ peut donc être considéré comme la limite du second membre. Or deux quantités variables toujours égales ont aussi des limites égales: donc on a $\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC}$, ou $P : Q = BC : AC$, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

28. Pour faire équilibre à deux forces quelconques P, Q, appliquées aux extrémités d'une droite inflexible AB, il faut donc diviser cette droite, au point C, en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces, et appliquer en ce point une troisième force égale à la somme $P+Q$, qui agisse en sens contraire, et dont la direction soit parallèle à celles des deux forces données. Fig. 19.

Pour opérer la division dont il s'agit, il suffit d'observer que de la proportion :

$$P : Q = BC : AC, \ldots\ldots\ldots (1)$$

on déduit:

$$P + Q : P = BC + AC \text{ ou } AB : BC.$$

Les trois premiers termes étant connus, on trouve pour le quatrième, qui sert à déterminer le point C:

$$BC = \frac{P.AB}{P+Q}.$$

De la même proportion (1), on déduirait également:

$$AC = \frac{Q.AB}{P+Q}.$$

COROLLAIRE 2.

Fig. 20. 29. Une force unique R appliquée à un point C d'une droite inflexible, peut toujours se décomposer en deux autres P et Q, qui étant appliquées à deux points A, B, données sur cette droite, agissent parallèlement à CR, et sont capables du même effet que la force R. Pour trouver les grandeurs de ces forces P, Q, qui varient avec la position des points d'application A et B, il suffit de partager la force R en deux parties réciproquement proportionnelles aux distances données AC, CB, au moyen des deux proportions suivantes:

$$AB : BC = R : P,$$
$$AB : AC = R : Q,$$

desquelles on déduit :

$$P = \frac{R.BC}{AB},$$

$$Q = \frac{R.AC}{AB}.$$

COROLLAIRE 3.

30. Si l'on applique au point C, dans lequel la résultante des deux forces P, Q, coupe leur droite d'application AB, une force S, égale et directement opposée à cette résultante, il est clair que les trois forces P, Q, S, seront en équilibre. Chacune d'elles (§ 9) pouvant être regardée comme étant égale et directement opposée à la résultante des deux autres, il s'ensuit que la résultante des deux forces S, Q, qui agissent parallèlement, mais en sens contraires, est une force p, égale et directement opposée à la force P. Or cette dernière est égale à la différence des forces S, Q, et agit dans un sens contraire à la plus grande S de ces deux forces: Donc 1°. la résultante p des deux forces S, Q, parallèles et agissant en sens contraires, est égale à leur différence $S-Q$, et agit dans le sens de la plus grande, suivant une direction parallèle à celles des forces, et 2°. à cause de la proportion: Fig. 21.

$$P+Q \text{ ou } S : Q = AB : AC,$$

les distances du point A d'application de cette résultante aux deux points C et B, sont réciproquement proportionnelles aux forces S, Q.

COROLLAIRE 4.

31. De ce dernier principe, on déduit comme conséquence immédiate, le moyen de déterminer la position du point A d'application de la résultante des

deux forces S, Q, qui sont parallèles et agissent en sens contraires; car de la proportion précédente $S : Q = AB : AC$, on déduit:

$$S - Q : Q = AB - AC \text{ ou } BC : AC,$$

$$\text{et } S - Q : S = AB - AC \text{ ou } BC : AB,$$

dans les quelles tous les termes sont connus, à l'exception des derniers.

COROLLAIRE 5.

32. Si les deux forces S, Q, dont les directions sont parallèles, et qui agissent en sens contraires, sont égales entre elles, 1°. leur résultante p qui est égale à $S - Q$, devient nulle: 2°. de la proportion:

$$S - Q : Q = BC : AC,$$

on déduit pour la distance de son point d'application au point C,

$$AC = \frac{Q.BC}{O}.$$

Ce qui fait voir que cette distance est infinie. Pour faire équilibre aux deux forces égales et dirigées en sens contraires S, Q, il faudrait donc appliquer à la droite inflexible CB, une force nulle, et dont la direction passât à une distance infinie; résultat qui sans être absurde, est inexécutable en pratique, et fait voir qu'il est impossible, au moyen d'une force unique, de faire équilibre à deux forces égales dont les directions sont parallèles, et qui agissent en sens contraires.

Pour mettre en équilibre le système de forces dont il s'agit, il serait donc indispensable d'y indroduire

deux forces nouvelles, et comme l'une d'elles pourrait être arbitraire, il s'ensuit qu'on peut établir l'équilibre d'une infinité de manières.

PROBLÊME.

33. "*Un nombre quelconque de forces* P, Q, Fig. 22.
»R, S, ... *etc. dont les directions sont parallè-*
»*les, et qui agissent dans le même sens, étant ap-*
»*pliquées à des points* A, B, C, D, ... *etc.*
»*donnés de position, et liés entre eux d'une ma-*
»*nière invariable, déterminer la résultante de*
»*toutes ces forces.*"

Solution. "Considérant d'abord deux quelcon-
»ques de ces forces, telles que P et Q, on détermi-
»nera leur résultante T (§27); Cette résultante sera
»égale à $P+Q$; sa direction sera parallèle à celle des
»deux forces P, Q, et l'on trouvera son point d'ap-
»plication E par la proportion suivante:

$$P+Q : Q := AB : AE.$$

»A la place des deux forces P, Q, on substituera
»leur résultante T; puis ayant mené la droite EC,
»on déterminera la résultante V des deux forces
»T, R: Cette résultante V sera aussi celle des trois
»forces P, Q, R; sa grandeur sera $T+R$, ou $P+Q+R$,
»et l'on trouvera sur EC son point d'application F
»par la proportion:

$$T+R \text{ ou } P+Q+R : R = EC : EF.$$

»A la place des trois forces P, Q, R, on substitue-
»ra leur résultante V, et après avoir mené la droite
»FD, on trouvera la résultante X des deux forces

»V, S. Cette résultante X sera aussi celle des quatre »forces P, Q, R, S; sa grandeur sera $V+S$, ou $P+Q$ »$+R+S$, et l'on trouvera sur FD son point d'ap- »plication G, par la proportion :

$$V+S \text{ ou } P+Q+R+S : S = FD : FG.$$

»En continuant ainsi de suite, on trouvera la po- »sition de la résultante générale de toutes les forces »en quelque nombre qu'elles soient, et la grandeur »de cette résultante sera égale à la somme de toutes »ces forces."

COROLLAIRE 1.

34. "Donc, supposant que le point G soit lié aux »autres points A, B, C, D, ... d'une manière »invariable, on fera équilibre à toutes les forces P, Q, »R, S, ... en appliquant au point G, une »force dont la direction soit parallèle à celles des »premières, qui agisse en sens contraire, et qui soit »égale à leur somme $P+Q+R+S+$ . . . .

COROLLAIRE 2.

35. "Si parmi les forces P, Q, R, S, dont les direc- »tions sont parallèles, les unes agissaient dans un sens, »et les autres dans le sens contraire, on détermine- »rait d'abord (§ 33) la résultante particulière de »toutes celles qui agiraient dans un sens, et ensuite »la résultante particulière de toutes celles qui agi- »raient dans le sens contraire. Par là toutes les forces »seraient réduites à deux autres agissant en sens op- »posés; et en déterminant par le procédé de l'article »31 la résultante de ces deux dernières forces, on au-

»rait la résultante générale, et par conséquent la »force qui appliquée en sens contraire, ferait équilibre à toutes les forces proposées."

"La résultante générale étant égale à la différence »des deux résultantes particulières (§ 30), et chacune de celles-ci étant égale à la somme de toutes »celles qui la composent (§ 33), il s'ensuit que la »résultante générale est égale à l'excès de la somme »des forces qui agissent dans un sens, sur la somme »de celles qui agissent en sens contraire."

COROLLAIRE 3.

36. "Si les forces $P, Q, R, S, \ldots\ldots$, sans cesser d'être parallèles, et sans changer de grandeurs, »avaient une autre direction et devenaient p, q, »r, s, ... ; la résultante t des deux premières »passerait également par le point E, et serait égale »à la somme $p+q$. Pareillement la résultante v des »trois forces p, q, r, passerait encore par le point F, »et serait égale à la somme $p+q+r$. De même la »résultante x des quatre forces p, q, r, s, passerait »encore par le point G, et serait égale à la somme »$p+q+r+s$, et ainsi de suite. Donc la résultante »générale de toutes les forces p, q, r, s . . . . passe»rait encore par le même point que la résultante gé»nérale des premières forces P, Q, R, S . . . . .

"On voit donc que quand les grandeurs et les »points d'application de forces parallèles restent les »mêmes, la résultante de ces forces passe toujours »par un certain même point, quelle que puisse être

»leur direction; et la grandeur de cette résultante est »toujours égale à leur somme."

"Le point par lequel passe toujours la résultante »des forces parallèles, quelle que soit leur direction, »se nomme *centre des forces parallèles*."

"Il est facile de voir que si les points d'applica»tion A, B, C, D . . . . . . sont dans un même plan, »le centre de ces forces est aussi dans ce plan, car »ce plan contient la droite AB, et par conséquent »le point E de cette droite, qui est le centre des for»ces P, Q; il contient de même la droite EG, et par »conséquent le centre F des forces P, Q, R; il con»tient la droite FD, et par conséquent le centre G »des forces P, Q, R, S; et ainsi de suite."

"On démontre de la même manière que si les »points d'application sont sur une même ligne droite, »le centre des forces parallèles est aussi sur cette »droite."

THÉORÊME 6.

Fig. 23, 24. 37. "*Si les directions de deux forces* P, Q, *ap»pliquées à deux points* A, B, *d'un même corps, »sont comprises dans un même plan, et par con»séquent concourent en un certain point* D:

1°. "*La direction de la résultante de ces deux »forces passe par le point de concours* D;

2°. "*Cette direction est comprise dans le plan »déterminé par celles des deux forces* P, Q."

"*Démonstration:* 1ère *Partie.* Le point D se trou»vant sur la direction des deux forces, si l'on sup-

»pose que ce point soit attaché au corps d'une ma-»nière invariable, on pourra concevoir que les deux »forces *P*,*Q*, au lieu d'être appliquées aux points *A*,*B*, »le sont toutes deux au point *D*, et qu'elles n'ont »d'autre effet que de tendre à mouvoir ce point; »donc leur résultante peut aussi être regardée com-»me n'ayant pas d'autre effet. Or une force unique »ne peut agir sur un point unique, à moins qu'elle »ne soit directement appliquée à ce point. Donc la »résultante des deux forces *P*, *Q*, peut être regardée »comme appliquée au point *D*. Donc 1°. la direction »de cette force passe par le point de concours de ses »deux composantes."

2eme. *Partie.* "Si par les deux points d'application »*A*, *B*, on conçoit une droite inflexible attachée au »corps d'une manière invariable, l'effet des deux »forces *P*, *Q*, et par conséquent celui de leur résul-»tante est évidemment de tendre à mouvoir la droite »*AB*. Or une force unique ne peut mouvoir une droi-»te unique, à moins qu'elle ne soit directement ap-»pliquée à quelqu'un des points de cette droite. Donc »la résultante des deux forces *P*, *Q*, peut être regar-»dée comme appliquée à quelqu'un des points de la »droite *AB*; donc la direction de cette force passe »en même temps, et par le point *D*, et par un des »points de la droite *AB*; donc 2°. elle est comprise »dans le plan du triangle *ABD*, déterminé par les »directions des deux composantes *P*, *Q*."

COROLLAIRE.

38. "Il suit de là que si trois forces P, Q, R, ap»pliquées à un même corps, sont en équilibre entre »elles, les directions de ces trois forces concourent »en un même point D, et sont comprises dans un »même plan."

"Car ces trois forces étant en équilibre, l'une »quelconque d'entre elles est égale et directement »opposée à la résultante des deux autres: donc deux »quelconques de ces forces ont une résultante; donc »(§ 18) les directions de ces deux forces sont com»prises dans un même plan, et concourent en un »même point: donc (§ 37) la direction de la résul»tante de ces deux forces, et par conséquent celle »de la troisième force qui leur fait équilibre, passe »par le point de concours, et est comprise dans le »plan déterminé par leurs directions."

THÉORÊME 7.

Fig. 25. 39. *Lorsque les directions de deux forces P, Q, sont comprises dans un même plan, et concourent en un même point A, la résultante de ces deux forces est dirigée suivant la diagonale AD d'un parallélogramme $ABDE$, construit sur les directions des forces, et dont les côtés AB, AE, sont tels que leurs longueurs sont proportionnelles à ces forces, c'est-à-dire que l'on a:*

$$P : Q = AE : AB.$$

Démonstration. Soit P la plus grande des deux forces données; remplaçons son action par celle de

deux forces Q et $P-Q$, dont les directions soient parallèles à AP, et dont les points d'application C et B soient disposés de manière à ce qu'on ait la proportion :

$$P : Q = BC : AB \, \ldots\ldots\ldots \, (a).$$

Pour cela (§ 29), il suffira de prendre sur le prolongement de AQ, un point C arbitraire, comme point d'application de la force Q. Le point d'application de la force $P-Q$ se déterminera au moyen de la proportion:

$$P-Q : Q = AC : AB.$$

Cela posé, le systême des deux forces P, Q, se trouvera remplacé par celui des trois forces Q, $P-Q$ et Q, capables du même effet, et dont les deux premières auront des directions parallèles à celle de la force P. Mais dans ce dernier systême, les deux forces égales à Q, pouvant être considérées comme appliquées au point C, auront pour résultante une force unique r, qui passera par le même point, et partagera l'angle QCQ en deux parties égales. Le systême des deux forces r et $P-Q$ produira donc le même effet que celui des trois forces Q, $P-Q$ et Q, ou ce qui revient au même, que celui des deux forces primitives P,Q. Ces deux systêmes de forces auront donc une seule et même résultante. Or cette résultante, en tant qu'elle appartient au systême des forces P,Q, passe par le point A: de plus, en tant qu'elle appartient au systême des forces r et $P-Q$, elle passe

par le point D de concours de ces forces. Donc elle passe à la fois par les points A et D; donc elle suit la direction AD.

Si l'on mène par le point D, la ligne DE parallèle à AB, il est clair que la figure $ABDE$ sera un parallélogramme, dans lequel le côté AE sera égal au côté BD. Mais les angles BDC et QCD étant égaux, comme alternes internes, et le dernier de ces angles étant égal à son tour à DCB, comme moitié du même angle en C, il s'ensuit que les deux angles BDC et DCB sont égaux entre eux, ou que le triangle DCB est isocèle: Donc le côté BC est égal au côté BD, ou à son opposé AE dans le parallélogramme $ABDE$. Substituant AE à son égal BC dans le proportion (a), elle devient:

$$P : Q = AE : AB;$$

Ce qui prouve que la direction AD de la résultante est la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont proportionnels aux forces données.

40. Les corollaires de cette proposition, ainsi que les théorémes et les problêmes qui la suivent, étant exposés avec autant de clarté que de rigueur dans le traité élémentaire de Monge, j'ai dû borner à ce qui précède les modifications auxquelles je me suis permis de soumettre cet excellent ouvrage.

Au lieu de suivre la marche que nous venons de tracer, en passant de la théorie générale des forces parallèles à celle des forces concourantes, on pourrait adopter une marche inverse, qui serait peut-être

plus naturelle, et déduire des théorêmes 3 et 4, une démonstration générale du parallélogramme des forces, qui servirait ensuite de base à toutes les propositions relatives aux forces parallèles inégales.

Supposons donc les théorêmes 3 et 4 démontrés, ainsi qu'on l'a vu (§§ 20, 24). Après l'exposition des deux corollaires qui se lient à la dernière de ces propositions, nous poursuivrons de la manière suivante:

COROLLAIRE 3.

41. Il est clair que la réciproque de cette proposition (§ 26), a également lieu, c'est-à-dire que l'on peut toujours remplacer une force unique *P*, appliquée au point *A*, par un nombre *m* de forces *p*, égales chacune à $\frac{P}{m}$, pourvu que ces dernières soient distribuées également le long d'une droite arbitraire *BC*, telle que le point *A* soit situé en son milieu, et que les points *E* et *F*, *D* et *G*, etc, se trouvent disposés deux à deux à des distances égales de ce même point *A*. Fig. 26.

COROLLAIRE 4.

42. *Deux forces parallèles mP et P, appliquées aux extrémités A, F, d'une même droite supposée inflexible, ont pour résultante une force R, égale à leur somme (m+1) P, et dont la direction leur est parallèle.* Fig. 27.

Divisons en effet la droite d'application au point *H*, de manière qu'on ait:

$$AF : HF = m+1 : 2;$$

nous aurons évidemment:

$$AF-HF : HF = m-1 : 2;$$

$$\text{ou } AH : HF = \frac{m-1}{2} : 1.$$

Prenons à gauche du point A sur le prolongement de AF, une longueur $AI=AH$; nous aurons $IH=2AH$, et à cause de la dernière proportion:

$$IH : HF = m-1 : 1.$$

d'où

$$IH+HF \text{ ou } IF : HF = m : 1.$$

Partageant IF en m parties égales aux points $a, b, c, d, \ldots\ldots H$, et appliquant à tous les points de division une force égale à P, il est clair que toutes les forces P distribuées de I en H, au nombre de m, produiront le même effet que la force unique mP. Le système des deux forces données mP et P sera donc ramené à celui d'un nombre $m+1$ de forces partielles, égales chacune à P; or la résultante de ce système est égale à la somme des forces ou à $(m+1)P$, et suit une direction parallèle à celle de ces forces. Donc aussi la résultante des deux forces proposées mP et P est égale à leur somme $(m+1)P$, et agit suivant une direction qui leur est parallèle.

COROLLAIRE 5.

Fig. 28. 43. *Si les deux forces P, mP, au lieu d'être parallèles, agissent suivant des directions concourantes en un même point A, leur résultante suivra la direction de la diagonale d'un parallélogramme $ABCD$ construit sur les directions des deux forces,*

et tel que les côtés contigus AB, AD, seront entre eux dans le rapport des forces, ou comme m est à 1.

Pour démontrer cette proposition, nous examinerons d'abord les cas particuliers où m est successivement égal à 2, 3, etc., et nous passerons ensuite au cas général.

Soient donc deux forces 2 P, P, agissant sur le même point A; je dis que leur résultante suivra la direction de la diagonale d'un parallélogramme $ABCD$ construit sur les directions des forces données, et dont les côtés contigus AB, AD, seront entre eux dans le rapport des forces proposées, ou comme 2 est à 1. Fig. 29.

On peut en effet substituer à l'action de la force 2P, celle de deux forces P, dont les points d'application D, E, soient situés à égales distances du point A, et dont les directions soient parallèles à celle de la force 2 P. Or les deux forces P qui concourent au point E, ont pour résultante une force r, qui partage l'angle E en deux parties égales. Le système des deux forces données peut donc être remplacé par celui de la force r, et de la seconde composante qui est appliquée au point D. Les directions de ces deux dernières forces se coupant au point C, il est clair que leur résultante devra passer par ce même point: Mais cette résultante étant la même que celle des deux forces P et 2 P, qui passe évidemment par le point A, il s'ensuit que sa direction de-

vra passer à la fois par les points A et C, ou se confondre avec la droite AC.

Menant du point C la droite CB parallèle à AD, la ligne AC deviendra la diagonale d'un parallélogramme $ABCD$, dans lequel on aura: $AB=DC$. Mais les angles DCE et CEP étant égaux comme alternes internes, et ce dernier étant égal à l'angle CED, on voit que le triangle EDC est isocèle, et que par conséquent $DC=DE=2AD$. Donc puisque $AB=DC$, on a aussi $AB=2\,AD$, c'est-à-dire que les côtés contigus AB et AD sont entre eux comme 2 est à 1, ou dans le rapport des forces données $2P$ et P.

Concevons actuellement que ces deux mêmes forces $2\,P$ et P, au lieu de concourir au point A,
Fig. 30. aient des directions parallèles, et proposons nous de déterminer la position de leur résultante.

Si de chaque côté de la droite d'application AF prolongée indéfiniment, on applique une force égale à P, il est clair que l'introduction de ces deux nouvelles forces ne changera rien au système, puisqu'étant égales entre elles et directement opposées, elles se feront équilibre.

Or la résultante r' des deux forces égales à P, qui agissent au point F, partagera l'angle PFP, en deux parties égales. De plus la résultante r'' des forces P et $2\,P$ qui agissent au point A, suit la direction de la diagonale d'un parallélogramme $ABCD$, dont les côtés AB et AD sont entre eux comme 2 est à 1. Le système des quatre forces données sera donc ra-

mené à celui des deux résultantes partielles r' et r'' qui concourent au point G. La résultante de ce système, ou ce qui est la même chose, la résultante R des forces primitives P et $2P$, passera donc par le point G. Mais nous savons (§ 42) que cette résultante est égale à la somme des forces ou à $3P$, et qu'elle agit suivant une direction parallèle à celle de ces forces. Elle agira donc suivant GR menée parallèlement à FP.

Comme cette direction GR serait parfaitement déterminée, si on connaissait la position du point E, dans lequel elle coupe la droite d'application AF, c'est de la détermination de ce point qu'il nous reste à nous occuper. Le triangle GEF étant isocèle à cause des angles EGF et EFG qui sont égaux, on aura $EG = EF$. Mais les triangles ACB et GAE sont évidemment semblables, puisque tous leurs angles sont égaux: donc on a:

$$AF : EG = CB : AB \text{ ou } = 1 : 2,$$

ou à cause de $FG = EF$,

$$AE : EF = 1 : 2.$$

Donc AE est égale à la moitié de EF, ou au tiers de AF; ce qui prouve que le point E divise la droite d'application en deux parties AE, EF, qui sont entre elles dans le rapport inverse des forces données $2P$ et P.

Passant au cas où deux forces concourantes $3P$ et P agissent sur le même point A, nous remarquerons que suivant ce qui vient d'être démontré, Fig. 31.

la force 3 *P* peut être remplacée par deux forces parallèles 2 *P* et *P*, dont les points d'application soient situés à des distances arbitraires *AD, AE*, telles que la première soit moitié de la seconde.

Trouver la résultante des deux forces *P* et 3 *P*, sera donc la même chose que trouver la résultante des trois forces *P*, 2 *P* et *P*. La 1ère et la 3ème pouvant être considérées comme agissant au point *E*, leur résultante *r* divise l'angle *PEP* en deux parties égales. Il ne reste donc plus à déterminer que la résultante des deux forces *r* et 2 *P*. Mais ces forces concourant en un point *C*, leur résultante devra passer par ce même point. Elle passera de plus par le point *A*, puisqu'elle est résultante du systéme. Donc elle suivra la direction *AC*. Menant *CB* et *CD* respectivement parallèles aux directions des forces *P* et 3 *P*, on formera le parallélogramme *ABCD*, dont le côté *AB* ou *CD* est égal à *ED*, à cause du triangle isocèle *ECD*. *AE* étant le double de *AD*, *ED* sera évidemment égal à 3 *AD*; donc *AB* qui est égal à *ED*, est aussi triple de *AD*, c'est-à-dire que les côtés *AB* et *AD* sont entre eux dans le rapport des forces données 3 *P* et *P*, *C. Q. F. D.*

On ferait voir avec la même facilité que précédemment, que dans le cas où les deux forces 3 *P* et *P*, au lieu de concourir en un même point, seraient parallèles, leur résultante, égale à leur somme 4 *P*, et dirigée parallélement à leurs directions, passerait par un point *E* de la droite d'application, tel que

Fig. 32.

EF serait égal à 3 *AE*, ou que *AE* serait le quart de *AF*.

Passant de là à la considération des forces concourantes *P* et 4 *P*, on décomposerait cette dernière en deux forces parallèles 3 *P* et *P*, appliquées à des points *D* et *E* situés à des distances *AD*, *AE*, telles que la 1ère serait égale au tiers de la seconde, ou que *AD* serait égale à $\frac{1}{4}$ *DE*. La résultante *r* des deux forces *P*, qui concourent au point *E*, partageant l'angle *PEP* en deux parties égales, et rencontrant au point *C* la direction de la force 3 *P*, on en conclurait que la résultante générale du système doit passer par ce point *C*, et comme elle doit également passer par le point *A*, il s'ensuivrait que sa direction se confondrait avec la diagonale *AC* du parallélogramme *ADCB*. *DC* ou *AB* étant égal à *DE*, et celle-ci étant le quadruple de *AD*, on en déduirait que les côtés *AD* et *AB* du parallélogramme dont la diagonale représenterait la direction de la résultante, seraient encore entre eux dans le rapport des forces proposées *P* et 4 *P*, et ainsi de suite pour les divers multiples de la force *P*. Fig. 33.

Mais pour ne point livrer à la seule induction une proposition aussi importante, je supposerai que le théorème qu'il s'agit de démontrer a lieu pour les forces *P* et $(m-1)$ *P*, et je démontrerai qu'il aura également lieu pour les forces *P* et *m P*.

Admettons donc que les forces *P* et $(m-1)$ *P*, aient leur résultante dirigée suivant la diagonale *AC* Fig. 34.

du parallélogramme *ABCD* construit sur les directions des forces, et tel que les côtés *AB* et *AD* soient entre eux dans le rapport de ces forces, ou comme $m-1$ est à 1.

Supposons que ces forces deviennent parallèles, et soient appliquées aux extrémités *A*, *F*, d'une même droite inflexible. Nous introduirons sur le prolongement de *AF*, et dans des directions opposées, deux forces égales à *P*, qui se faisant équilibre entre elles, n'altéreront en rien le système des forces données. Composant, ainsi que nous l'avons fait précédemment, les deux forces *P*, qui agissent au point *F*, nous tracerons la direction de leur résultante r', en divisant l'angle *PEP* en deux parties égales. Pour construire la direction de la résultante r'' des deux forces restantes *P* et $(m-1)\,P$, qu'on peut regarder comme appliquées au point *A*, nous formerons le parallélogramme *ABCD*, dont les côtés *AD* et *AB* soient entre eux comme 1 est à $m-1$: La diagonale de ce parallélogramme, suivant laquelle est dirigée la résultante r'', rencontrant en *G* la direction de la résultante r', nous mènerons par ce point la ligne *GE* parallèle aux directions des forces données, et nous obtiendrons ainsi la direction de la résultante générale du système, qui est en même temps celle des deux forces $(m-1)\,P$ et *P*.

Fig. 35.

La position du point *E* d'application de cette résultante nous sera donnée par la comparaison des

triangles semblables *GAE* et *ACB*, qui donnent la proportion:

$$AE : EG = CB : AB = 1 : m-1\,;$$

mais dans le triangle isocèle *GEF*, on a :

$$EG = EF : \text{ donc}$$

$$AE : EF = 1 : m-1\,,$$

$$\text{ou bien } AE+EF : AE = m : 1\,;$$

$$\text{d'où } AE = \frac{AF}{m}.$$

La résultante cherchée étant d'ailleurs (§ 42) égale à *mP*, on en déduit qu'une force *mP* peut toujours être remplacée par deux forces parallèles $(m-1)\,P$ et *P*, agissant à des distances du point d'application de la force *mP*, qui sont entre elles dans le rapport inverse des composantes, ou comme 1 est à $m-1$.

Cela posé, en considérant le système des deux forces concourantes *P* et *m P*, on remplacera cette dernière par les deux forces $(m-1)\,P$ et *P*, agissant aux points *D* et *E*, tels que les distances *AD* et *AE* soient entre elles dans le rapport de 1 à $m-1$. Fig. 36.

La résultante des deux forces *P*, qu'on peut regarder comme agissant au point *E*, partageant l'angle *PEP* en deux parties égales, rencontre la direction de la force $(m-1)\,P$ au point *C*, qui appartient conséquemment à la résultante générale du système. Or cette résultante passe également par le point *A*; donc elle suit la direction *AC*. Menant *CB* et *CD* respectivement parallèles aux directions des forces données, on formera le parallélogramme *ABCD*, dans

lequel on aura $AB = CD = ED$, à cause du triangle isocèle EDC; mais de $AD : AE = 1 : m-1$, on déduit: $AD : ED = 1 : m$: Donc on a aussi:

$$AD : AB = 1 : m,$$

C'est-à-dire que la direction AC de la résultante se confond encore avec la diagonale d'un parallélogramme construit sur les directions des forces, et dont les côtés sont proportionnels aux grandeurs de ces forces.

Ayant ainsi démontré que si la proposition dont il s'agit est vraie pour les forces P et $(m-1)\,P$, elle l'est également pour les forces P et mP, il s'ensuit qu'elle a généralement lieu, quelque soit m; car nous avons fait voir qu'elle a lieu, par exemple, pour les forces P et $2\,P$, ou P et $3\,P$; donc elle a lieu pour P et $4\,P$; donc elle a encore lieu pour P et $5\,P$, pour P et $6\,P$, et ainsi de suite.

THÉORÈME 5.

Fig. 37. 44. *Deux forces $m\,P$ et $n\,P$, agissant dans un même plan, suivant des directions qui forment entre elles un angle quelconque, ont leur résultante R dirigée suivant la diagonale d'un parallélogramme $ABCD$ construit sur les directions de ces forces, et dont les côtés AB et AD sont entre eux dans le rapport de ces forces, ou comme n est à m.*

Démonstration. Nous pouvons d'après ce qui précède, substituer à la force $n\,P$, deux forces parallèles P et $(n-1)\,P$, agissant aux points E, D, tels

que les distances AE, AD, soient liées entre elles par la proportion:

$$AE : AD = n-1 : 1 \ldots\ldots (a).$$

Le système des deux forces données sera ainsi ramené à celui des trois forces $m\,P$, P, et $(n-1)\,P$. Pour déterminer la direction de la résultante des deux premières, nous construirons sur leurs directions un parallélogramme $EAFG$, tel que l'on ait:

$$EG \text{ ou } AF : AE = 1 : m.$$

En traçant la diagonale EF, nous aurons la direction de la résultante r des deux forces $m\,P$ et P, et il ne restera plus à déterminer que la résultante R des deux forces r et $(n-1)\,P$, qui sera la résultante générale du systême, ou ce qui revient au même, celle des deux forces données $m\,P$ et $n\,P$.

Les directions des forces $(n-1)\,P$ et r, se coupant au point C, il est clair que ce point appartiendra à la direction de leur résultante; mais cette résultante doit passer par le point A; donc elle suivra la direction AC.

Menons CB et CD respectivement parallèles aux directions des forces données, et formons ainsi le parallélogramme $ABCD$: la comparaison des triangles semblables CFB et AFE donnera

$$FB : BC \text{ ou } AD = AF : AE,$$

d'où l'on déduira:

$$FB + AF : AD + AE = AF : AE,$$

$$\text{ou } AB : DE = 1 : m \ldots\ldots (b)$$

Mais la proportion (a) donne

$$AE+AD : AD = n : 1,$$

ou $DE : AD = n : 1 \ldots\ldots (c)$.

Multipliant les deux proportions (b) et (c) terme à terme, il vient

$$AB : AD = n : m;$$

C'est-à-dire que les côtés du parallélogramme $ABCD$ dont la diagonale représente la direction de la résultante des forces proposées nP et mP, sont entre eux dans le rapport de ces forces, ou comme n est à m, *C. Q. F. D.*

LEMME.

45. *Si deux forces P, Q, dont les directions con-*
Fig. 38. *courent en un même point A, ont leur résultante dirigée suivant AR, et qu'on ajoute à l'une d'elles, à Q par exemple, l'action d'une nouvelle force q dirigée dans le même sens, la résultante r des deux forces P et $Q+q$, sera située au dessous de la résultante R des forces primitives P et Q.*

Démonstration: En effet la résultante des deux forces P et $Q+q$, étant évidemment la même que celle des forces R et q, devra nécessairement exercer son action dans l'angle RAQ formé par les directions de ces dernières. Donc elle sera dirigée suivant une droite située au dessous de AR.

On démontrerait de la même manière que la ré-
Fig. 39. sultante r' des deux forces $P+p$ et Q, serait située au dessus de la résultante des forces P et Q.

THÉORÊME 6.

46. *Deux forces concourantes quelconques P, Q, agissant dans un même plan, ont leur résultante R dirigée suivant la diagonale d'un parallélogramme $ABCD$ construit sur les directions de ces forces, et dont les côtés AB, AD, sont proportionnels à ces forces.* Fig. 40.

Démonstration: Ou les forces données P, Q, sont commensurables entre elles, ou elles sont incommensurables.

Dans la première hypothèse, nommant Π leur commune mesure, et supposant que cette commune mesure soit comprise m fois dans P, et n fois dans Q, on aura $P=m\ \Pi$, $Q=n\ \Pi$, et l'on rentrera dans le cas du théorême 5 que nous venons de démontrer.

Dans la seconde hypothèse, ou quand les forces données seront incommensurables, la proposition n'en aura pas moins lieu, c'est-à-dire que la résultante R n'en suivra pas moins la direction de la diagonale AC d'un parallélogramme $ABCD$, dont les côtés contigus seront liés entre eux par la proportion:

$$AD : AB = P : Q.$$

Admettons en effet que la résultante R suive une tout autre direction, celle de la droite AE par exemple. Quelque près que cette droite se trouve de la diagonale AC, il sera toujours possible de prendre dans l'angle RAE, sur le prolongement de DC, un point F, tel que la longueur DF soit commensurable avec AD. Menant FG parallèle à AP, on for-

mera le parallélogramme $AGFD$, dans lequel le côté AG qui est égal à DF, sera commensurable avec le côté AD. La force P étant représentée par ce dernier côté, j'appellerai Q' la force représentée par AG. On aura donc.

$$P : Q' = AD : AG.$$

Les deux forces P, Q', étant ainsi dans le rapport de AD à AG, ou commensurables entre elles, leur résultante r suivra la direction AF. Mais la force Q' représentée par AG, étant visiblement plus grande que la force Q représentée par la longueur AB, sera conséquemment égale à $Q+q$, par exemple: donc si la supposition sur laquelle nous nous sommes fondés était exacte, ou si la résultante R des 2 forces P et Q suivait une direction AE, autre que celle de la diagonale AC, il s'ensuivrait que la résultante r des deux forces P et $Q+q$ serait dirigée suivant une droite AF située au dessus de AE, conclusion dont le lemme précédent fait voir toute l'absurdité: donc la résultante R suivra la direction AC de la diagonale du parallélogramme $ABCD$, pour lequel on a : $P : Q = AD : AB$,

C. Q. F. D.

THEORÊME 7.

Fig. 41. 47. *La résultante de deux forces quelconques P, Q, dont les directions concourent en un même point A, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale d'un parallélogramme construit sur les directions des forces données, et dont les côtés conti-*

gus ont des longueurs proportionnelles à ces forces.

Démonstration. Prenons sur les directions des forces P,Q, des longueurs AD, AB, qui leur soient proportionnelles, et achevons le parallélogramme $ABCD$. La proposition précédente fait voir que la résultante de ces deux forces suivra la direction AC de la diagonale de ce parallélogramme.

Appelons R cette résultante, dont la grandeur reste encore inconnue, et supposons qu'on applique suivant AC', dans une direction opposée à AC, une force R' égale à R. Il est clair (§ 8) que les trois forces P, Q, R', seront en équilibre. On pourra donc (§ 9) considérer chacune d'elles comme étant égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Ainsi, par exemple, la force P pourra être regardée comme étant égale et directement opposée à la résultante des deux forces Q et R'. Cette résultante que je nommerai P', agira donc suivant la direction AD' déterminée par le prolongement de AD. Mais cette même résultante, d'après ce qui précède, doit suivre la direction de la diagonale d'un parallélogramme construit sur les directions des forces Q et R', et dont les côtés soient proportionnels à ces forces. Si donc nous menons BD' parallèle à CC', et $D'C'$ parallèle à AQ, nous devrons avoir :

$$Q : R' = AB : AC',$$

ou à cause de $R' = R$,

$$Q : R = AB : AC'.$$

Or AC' est égale à BD', et cette dernière est égale à AC, comme lui étant parallèle et comprise entre CB et DD' qui sont aussi parallèles; donc $AC'=AC$; donc aussi:

$$Q : R = AB : AC \ldots\ldots (a)$$

On démontrerait d'une manière analogue que les forces P et R sont liées entre elles par la proportion:

$$P : R = AD : AC \ldots\ldots\ldots (b)$$

Donc on a :

$$P : Q : R = AD : AB : AC,$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

48. Cette relation entre la résultante R et ses composantes P, Q, fournit un moyen bien simple de déterminer la valeur de la première en fonction des deux autres.

En effet, de la proportion (b) on déduit:

$$\frac{R}{P} = \frac{AC}{AD}.$$

Mais en faisant l'angle $PAQ = \alpha$, on a entre les côtés du triangle obliquangle ACB, l'équation:

$$AC^2 = AD^2 + AB^2 + 2AB.\ AD.\ \cos.\ \alpha,$$

ou en divisant par AD^2:

$$\frac{AC^2}{AD^2} = 1 + \frac{AB^2}{AD^2} + 2\,\frac{AB}{AD} \cos.\ \alpha.$$

Mettant à la place de $\frac{AC}{AD}$ sa valeur $\frac{R}{P}$, et à la place de $\frac{AB}{AD}$ sa valeur $\frac{Q}{P}$, il vient:

$$\frac{R^2}{P^2} = 1 + \frac{Q^2}{P^2} + 2\,\frac{Q}{P} \cos.\ \alpha,$$

d'où:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q \cos.\ \alpha,$$

expression qui fera toujours connaître numériquement la valeur de R, quand les grandeurs des composantes P et Q seront données,

49. Après avoir ainsi démontré le principe général de la composition des forces concourantes, on passera à la composition des forces parallèles, en revenant au théorême 5 de la page 19, que l'on démontrera de la manière suivante :

Aux extrémités A, B, de la ligne d'application, que nous supposerons perpendiculaire aux directions des forces données, nous concevrons qu'on applique deux forces égales à P, agissant dans des sens opposés, et se faisant conséquemment équilibre. Nous prendrons, pour représenter les forces proposées, des longueurs AD, BH, qui leur soient proportionnelles. Nous construirons sur AD le quarré $ADEF$, et sur BH, le rectangle $BHIG$, en faisant BG égale à AD. Joignant les points A et E, B et I, les diagonales AE et BI représenteront en grandeurs et en directions la résultante des deux forces rectangulaires égales à P, qui agissent au point A, et celle des deux forces rectangulaires P et Q, qui agissent au point B; c'est-à-dire qu'en nommant r et r' ces deux résultantes, on aura : Fig. 42.

$$r : AE = P : AD \ldots\ldots (a)$$

$$r' : BI = P : BG \text{ ou } AD,$$

$$\text{d'où } r : r' = AE : BI.$$

Pour trouver la résultante des deux forces r, r', qui est en même temps la résultante générale du sys-

tême, ou celle des deux forces données P,Q, nous prolongerons les directions AE et BI, jusqu'à leur rencontre en A'. Prenant $A'E'$ égale à AE, et $A'I'$ égale à BI, nous acheverons le parallélogramme $A'E'K'I'$, dont la diagonale représentera en grandeur et en direction la résultante cherchée, que nous désignerons par R. Nous aurons ainsi:

$$R : r : r' = A'K' : A'E' : A'I',$$

ou bien

$$R : r : r' = A'K' : AE : BI \ldots\ldots (b).$$

Si nous menons par le point I, IK parallèle à $A'E$, nous formerons le triangle rectangle IHK, qui sera égal au triangle ADE, car le côté HI est égal à BG ou AD, et l'angle HIK est égal à l'angle DEA, comme ayant ses deux côtés parallèles à ceux de ce dernier angle. Nous aurons donc:

$$HK = HI = BG = AD,$$
$$\text{et } BK = BH + HK = BH + AD.$$

Mais l'égalité des mêmes triangles donnant aussi $IK = AE = A'E' = I'K'$, et les longueurs BI et $A'I'$ étant égales entre elles par construction, les triangles $A'I'K'$ et BIK seront égaux, comme ayant les angles égaux $A'I'K'$ et BIK compris entre des côtés égaux: donc $A'K' = BK = BH + AD$.

De l'égalité des triangles $K'I'A'$ et BIK, on déduit celle des angles $K'A'I'$ et KBI; ce qui fait voir que la résultante des forces données P, Q, suit une direction parallèle à celles de ces forces.

De plus, les proportions (a) et (b) donnant:

$$\frac{r}{AE} = \frac{P}{AD},$$

$$\text{et } \frac{R}{A'K'} = \frac{r}{AE},$$

on en conclut:

$\frac{R}{A'K'} = \frac{P}{AD}$, ou à cause de $A'K' = AD + BH$,

$$R = P\left(1 + \frac{BH}{AD}\right);$$

or $\frac{BH}{AD}$ est égal par hypothèse à $\frac{Q}{P}$: donc:

$$R = P\left(1 + \frac{Q}{P}\right),$$

$$\text{ou } R = P + Q;$$

Ce qui apprend que la résultante cherchée est égale en grandeur à la somme des forces données.

Les triangles $A'CB$ et BHI étant semblables, comme ayant tous leurs angles égaux, on a:

$$A'C : CB = BH : HI \text{ ou } BG,$$

$$\text{ou } A'C : CB = Q : P.$$

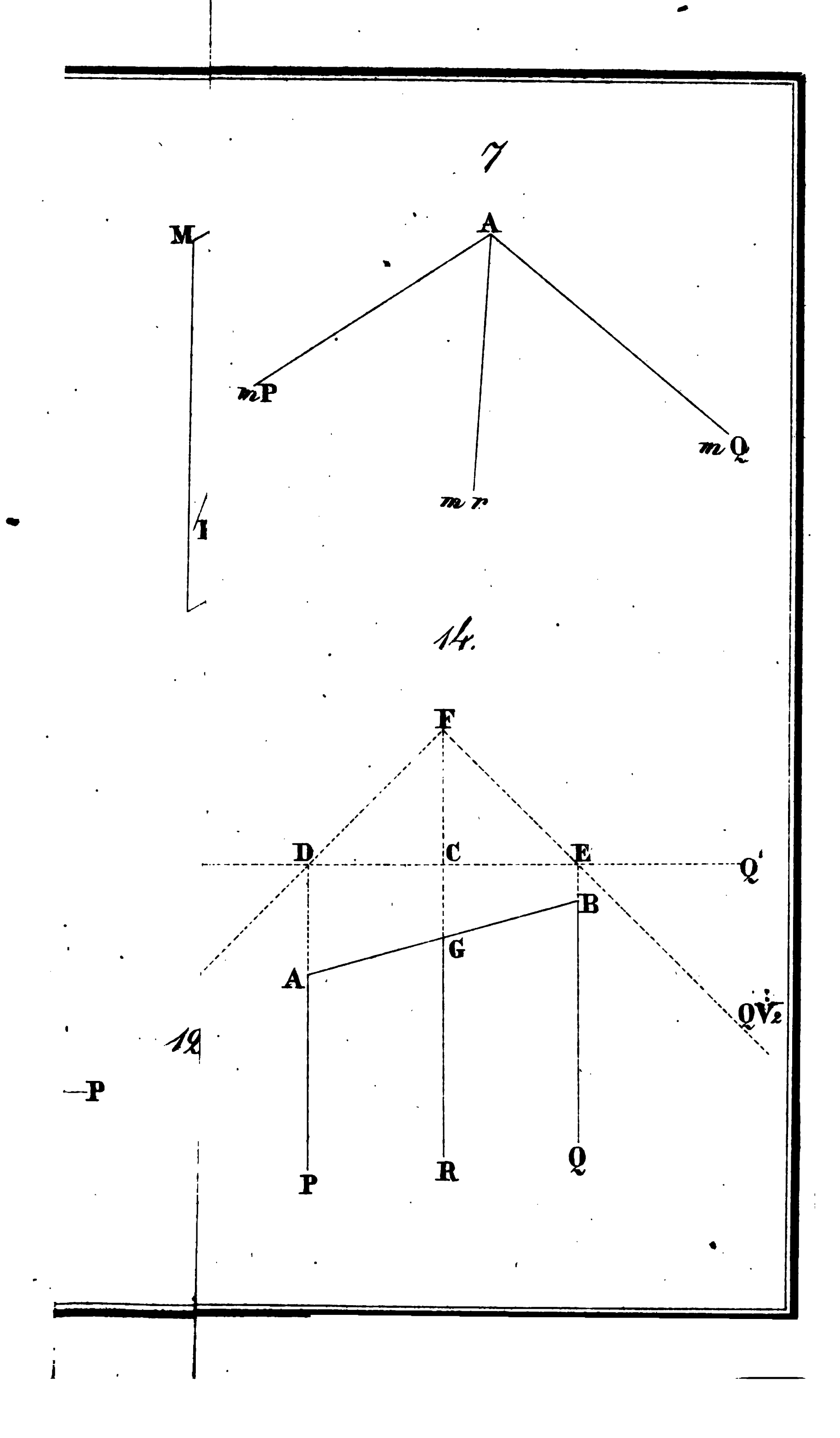
Mais le triangle ACA' étant isocèle, puisque ses angles en A et A' sont chacun de 45°, on a: $A'C = AC$,

$$\text{donc } AC : CB = Q : P,$$

$$\text{ou } P : Q = CB : AC,$$

Ce qui démontre que le point C d'application de la résultante R, divise la droite d'application des forces, en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces.

FIN.



7
M
A
mP
mr
mQ
I
14.
F
D
C
E
Q'
B
G
A
QV2
12
P
P
R
Q

B E

Q

18.

A C G B

P $\left\{ \begin{matrix} P \\ \pi \end{matrix} \right.$ R Q

R

D

23.

C B

Q

R

24.

A C B

D

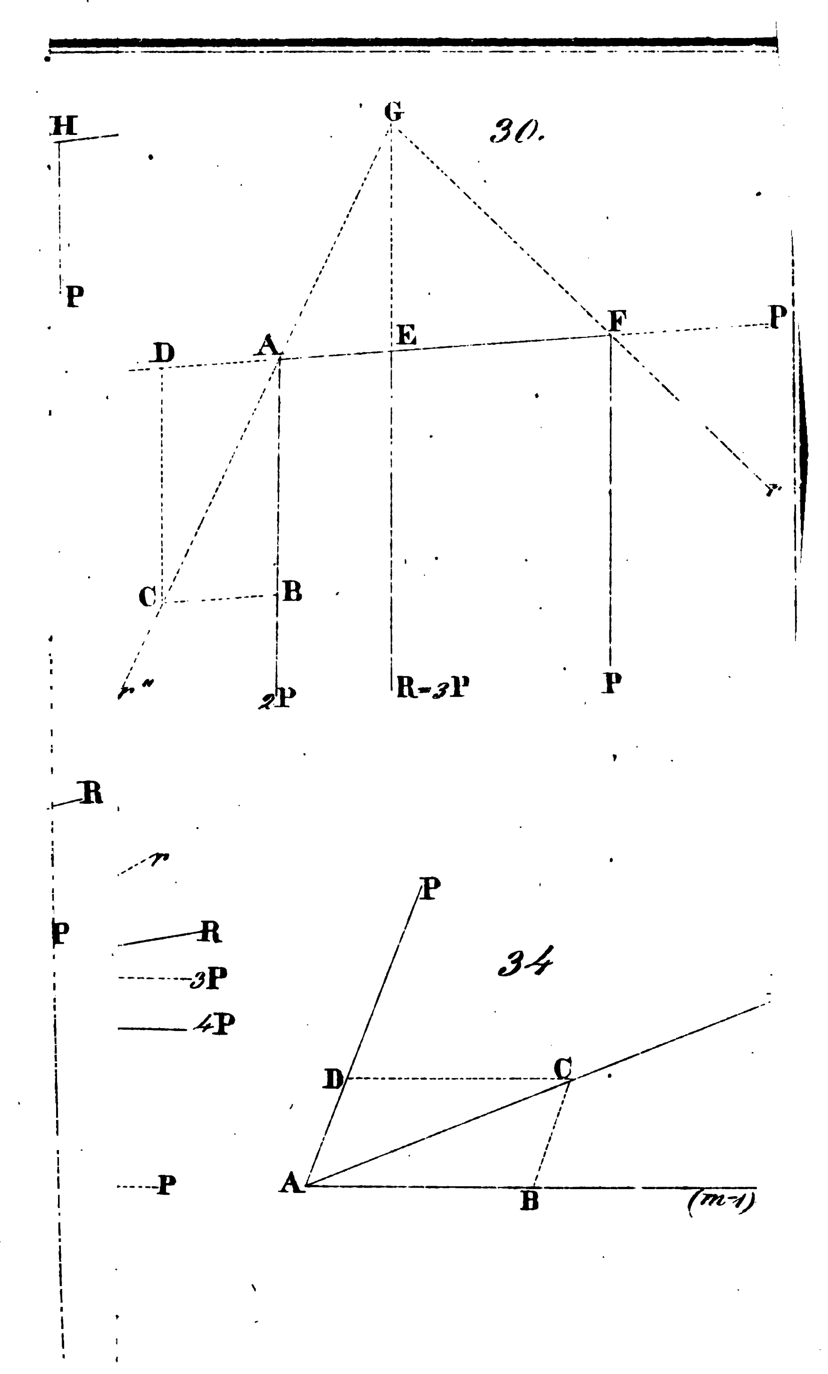
P Q

26.

B
G
E A F
D

p p p p p

P


30.
G
H
P
D
A
E
F
P
r'
C
B
r''
2P
R=3P
P
R
r
P
R
3P
4P
P
34
P
D
C
A
B
(m-1)

7

A

M

mP

mQ

mr

14.

F

D C E Q'

B

G

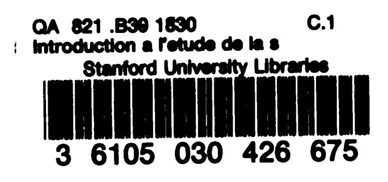
A

QV2

12

P

P R Q


QA 821 .B39 1830 C.1
Introduction a l'etude de la s
Stanford University Libraries
3 6105 030 426 675


LIBRARY

